Kuratowski-Zorn-Lemma (KZL): Jede nichtleere Partialordnung $(X, \leqslant)$, so dass jede Kette $K \subseteq X$ eine obere Schranke besitzt, besitzt ein maximales Element.

Anwendung Betrachte einen Körper K und einen K-Vektorraum V.

Satz: Für jedes Erzeugendensystem E von V und jede linear unabhängige Teilmenge $L \subseteq E$ existiert eine Basis B von V mit $L \subseteq B \subseteq E$.

Folge: (a) Jedes Erzeugendensystem von V enthält eine Basis von V.

(b) Jede linear unabhängige Teilmenge von V lässt sich zu einer Basis von V erweitern.

(c) Jeder Vektorraum besitzt eine Basis.

Beispiel: Der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller stetigen Funktionen $[0,1] \to \mathbb{R}$ hat eine Basis.

Beispiel: $\mathbb{R}$ hat eine Basis als $\mathbb{Q}$-Vektorraum.

Kardinalität

Referenz: [Halbeisen-Skript: Kapitel 6],
[Ebbinghaus, Einführung in die Mengenlehre, Kap. V, §3, Kap. IX]
[Analysis-Skript, Anhang A.1]

Grundsätzlich verwenden wir ZFC, auch wenn nicht alle Argumente das Auswahlaxiom benötigen.

Definition: Für Mengen x und y setzen wir

$$\begin{array}{ll} x \preceq y & \text{falls eine injektive Funktion } x \hookrightarrow y \text{ existiert,} \\ x \sim y & \text{falls eine bijektive Funktion } x \xrightarrow{\sim} y \text{ existiert,} \\ x \prec y & \text{falls } x \preceq y \text{ und } x \not\sim y \text{ gilt.} \end{array}$$

Proposition: Die Relation $\preceq$ ist reflexiv und transitiv, und $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation.

Satz: *(Cantor-Bernstein)* Für alle x und y gilt

$$(x \preceq y \wedge y \preceq x) \longleftrightarrow x \sim y.$$

Satz: Für alle x und y gilt $x \preceq y$ oder $y \preceq x$.

Endliche Mengen

Proposition 1: Für alle $m, n \in \omega$ ist $m \sim n$ äquivalent zu $m = n$.

Proposition 2: Für jedes $n \in \omega$ und jede echte Teilmenge $x \subsetneq n$ existiert $m \in \omega$ mit $m < n$ und $x \sim m$.

Satz: Für jede Menge x sind äquivalent:

(a) Es existiert ein $n \in \omega$ mit einer Bijektion $n \xrightarrow{\sim} x$.

(b) Es existiert ein $n \in \omega$ mit einer Injektion $x \hookrightarrow n$.

(c) Es existiert ein $n \in \omega$ mit einer Surjektion $n \twoheadrightarrow x$.

Definition: Eine Menge x mit den obigen Eigenschaften heisst *endlich*, andernfalls *unendlich*.

Folge: Für jede endliche Menge x existiert genau ein $n \in \omega$ mit $n \sim \omega$.

Definition: Dieses n heisst die *Kardinalität von* x, geschrieben $|x| := n$.

Folge: Für jede endliche Menge x und jede echte Teilmenge y gilt $|y| < |x|$.

Unendliche Mengen

Proposition: Für jede Menge x sind äquivalent:

(a) x ist unendlich.

(b) Für alle $n \in \omega$ gilt $n \prec x$.

(c) Es existiert eine injektive Funktion $\omega \hookrightarrow x$.

(d) Es existiert eine surjektive Funktion $x \twoheadrightarrow \omega$.

(e) Es existiert eine injektive aber nicht bijektive Funktion $x \hookrightarrow x$.

(f) Es existiert eine surjektive aber nicht bijektive Funktion $x \twoheadrightarrow x$.